

2.3 ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

Λέγεται η ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος και είναι κάθετη σ' αυτό .

2.

Ιδιότητα : Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

Και αντίστροφα

Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, τότε το σημείο βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος.

3.

Ιδιότητα : Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του.

4.

Γεωμετρική κατασκευή : Είναι η κατασκευή γεωμετρικού σχήματος χρησιμοποιώντας μόνο τον κανόνα (αβαθμολόγητος χάρακας) και το διαβήτη.

5.

Βάση των γεωμετρικών κατασκευών

Όλες οι γεωμετρικές κατασκευές γίνονται, αφού κατά τον Ευκλείδη ισχύουν τα παρακάτω «αιτήματα»

- Από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία
- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα
- Ο κύκλος ορίζεται από ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα).

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Κατασκευή του μέσου ευθυγράμμου τμήματος

Με την κατασκευή της μεσοκάθετου βρίσκουμε με απόλυτη ακρίβεια το μέσο του τμήματος.

2.

Κατασκευή κάθετης σε σημείο M ευθείας ε

Στην ε ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα με μέσο το M και κατασκευάζουμε την μεσοκάθετό του.

3.

Κατασκευή κάθετης σε ευθεία ε από σημείο M εκτός αυτής

Με κέντρο το M και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που να τέμνει την ε και στη συνέχεια κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο της χορδής που ορίζεται.

4.

Συμμετρία και μεσοκάθετος

Αν τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε , τότε η ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και μία διάμετρο AB αυτού. Να βρείτε σημεία του κύκλου τα οποία ισαπέχουν από τα A και B .

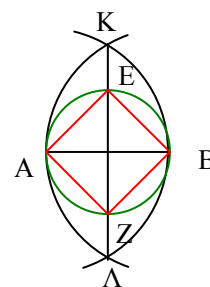
Προτεινόμενη λύση

Στον διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (O, ρ) και την διάμετρο AB αυτού.

Επειδή ζητάμε σημεία του κύκλου τα οποία ισαπέχουν από τα A και B , αυτά θα είναι τα σημεία τομής της μεσοκάθετης του τμήματος AB με τον κύκλο.

Με τη γνωστή διαδικασία, κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο $K\Lambda$ του τμήματος AB , η οποία τέμνει τον κύκλο στα E και Z .

Τα E και Z είναι τα ζητούμενα



2.

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 3 \text{ cm}$. Να κατασκευάσετε τρία ισοσκελή τρίγωνα με βάση το τμήμα AB . Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν;

Προτεινόμενη λύση

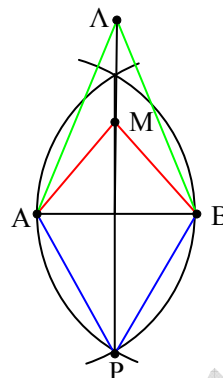
Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 3 \text{ cm}$ και φέρνουμε την μεσοκάθετό του ε .

Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της μεσοκάθετου και γράφουμε τα τμήματα MA , MB .

Τότε είναι $MA = MB$, δηλαδή το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για άλλα δύο τυχαία σημεία Λ , P της μεσοκάθετου.

Όπως είναι φανερό υπάρχουν άπειρα ισοσκελή τρίγωνα με βάση την AB



3.

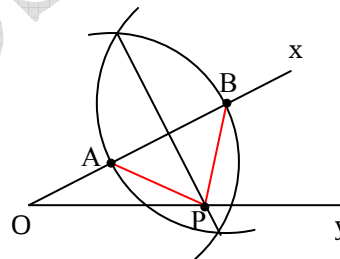
Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία $x\hat{O}y$. Στην πλευρά Ox να πάρετε δύο σημεία A και B . Να βρείτε σημείο της Oy που να ισαπέχει από τα A , B .

Προτεινόμενη λύση

Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει γωνία $x\hat{O}y$ και δύο σημεία A και B της πλευράς της Ox .

Επειδή το ζητούμενο σημείο θέλουμε να ισαπέχει από τα A , B , θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος AB .

Φέρνουμε λοιπόν τη μεσοκάθετο του AB , η οποία τέμνει την Oy σε σημείο P , οπότε το P είναι το ζητούμενο σημείο.



4.

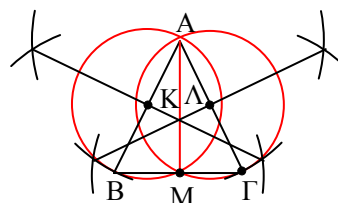
Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, να κατασκευάσετε τους κύκλους με διαμέτρους τις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ και να φέρεται την κοινή χορδή αυτών.

Προτεινόμενη λύση

Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς AB και έτσι ορίζεται το μέσο K .

Ομοίως βρίσκουμε το μέσο Λ της $A\Gamma$.

Γράφουμε τους κύκλους (K, KA) , $(\Lambda, \Lambda A)$, οι οποίοι επανατέμνονται σε σημείο M και φέρνουμε την κοινή χορδή AM .

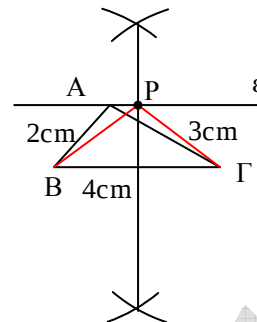


5.

Να κατασκευάσετε σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $B\Gamma = 4\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$ και $A\Gamma = 3\text{cm}$, και ευθεία ε που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$.
Να βρείτε σημείο της ε που ισαπέχει από τα B και Γ

Προτεινόμενη λύση

Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = 4\text{cm}$ με κέντρα τα B και Γ γράφουμε τους κύκλους $(B, 2\text{cm})$ και $(\Gamma, 3\text{cm})$ οι οποίοι τέμνονται σε σημείο A . Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο. Από το A φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στη $B\Gamma$ και την μεσοκάθετο του $B\Gamma$ που τέμνει την ε στο P . Το P είναι το ζητούμενο σημείο, αφού ισχύει $PB = P\Gamma$ λόγω του ότι το P ανήκει στη μεσοκάθετο.

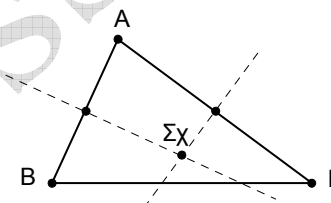


6.

Αν τα σπίτια A, B, Γ τριών μαθητών ισαπέχουν από το σχολείο τους να βρείτε την θέση του σχολείου τους.

Προτεινόμενη λύση

Έστω A, B και Γ τα σπίτια των τριών μαθητών. Αφού το σχολείο απέχει εξίσου από τα σπίτια A και B θα βρίσκεται στην μεσοκάθετο του AB και για τον ίδιο λόγο στην μεσοκάθετο του $A\Gamma$ επομένως η θέση του σχολείου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων AB και $A\Gamma$. Δεν έχουμε λοιπόν παρά να κατασκευάσουμε τις μεσοκάθετες των $AB, A\Gamma$.



7.

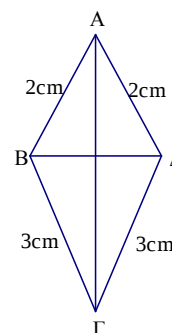
Να κατασκευάσετε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έτσι ώστε $AB = A\Delta = 2\text{cm}$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta = 3\text{cm}$ εξετάστε αν η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της $B\Delta$

Προτεινόμενη λύση

Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta < 4\text{cm}$. Οι κύκλοι $(B, 2\text{cm})$, $(\Delta, 2\text{cm})$ τέμνονται σε σημείο A , και οι κύκλοι $(B, 3\text{cm})$, $(\Delta, 3\text{cm})$ τέμνονται σε σημείο Γ .

Αφού $AB = A\Delta = 2\text{cm}$, το A ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$ και αφού $\Gamma B = \Gamma\Delta = 3\text{cm}$, το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

Επομένως η ευθεία $A\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Delta$



8.

Σχεδιάστε έναν κύκλο και μία διάμετρό του AB . Αν Γ και Δ είναι δύο σημεία του κύκλου να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της διαμέτρου AB από το οποίο διέρχονται οι μεσοκάθετες των χορδών $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$

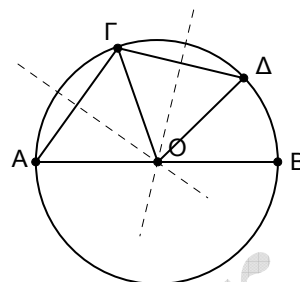
Προτεινόμενη λύση

Στο διπλανό σχήμα κατασκευάζουμε τις μεσοκάθετες των χορδών $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

Έστω O το κέντρο του κύκλου.

Επειδή $OA = OG = OD = \rho$, το O θα βρίσκεται αφ' ενός στη μεσοκάθετο της χορδής $A\Gamma$, αφ' ετέρου στη μεσοκάθετο της χορδής $\Gamma\Delta$.

Συνεπώς οι δύο μεσοκάθετες θα περάνε από το μέσο O της AB , το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου



9.

Σχεδιάστε έναν κύκλο και κατασκευάστε την εφαπτομένη του ϵ σε ένα σημείο του A . Αν B είναι οποιοδήποτε σημείο της εφαπτομένης, να δικαιολογήσετε γιατί το B είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

Η κατασκευή της εφαπτομένης στο σημείο A γίνεται ως εξής.

Φέρω την ακτίνα OA , και στην προέκτασή της παίρνω τμήμα $A\Gamma = OA$.

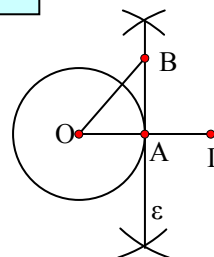
Φέρνω τη μεσοκάθετο ϵ του τμήματος OG .

Η ευθεία ϵ είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του A , αφού είναι κάθετη της ακτίνας OA στο A .

Αν B είναι οποιοδήποτε σημείο της ϵ , τότε είναι $OB > OA$, αφού το OA είναι κάθετο στην ϵ ενώ το OB είναι πλάγιο.

Και επειδή $OA = \rho$ θα είναι $OB > \rho$, συνεπώς το B είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου

Σχόλιο 2



10.

α) Στο διπλανό σχήμα, δικαιολογήσε γιατί τα M και M' είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία AB

β) Να συγκρίνετε τα τμήματα AM και AM' καθώς επίσης τα BM και BM'

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή $OM = OM' = \rho$ και $OB \perp MM'$, η OB είναι η μεσοκάθετος του τμήματος MM' .

Συνεπώς τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς άξονα την OB , δηλαδή την AB .

β)

Αφού η AOB είναι η μεσοκάθετος του τμήματος MM' θα είναι $AM = AM'$ και $BM = BM'$.

Σχόλιο 4

